Preparación Fase Local Olimpiada Matemática. Curso 2016/17
Combinatoria: maneras de contar

25 de noviembre de 2016

1. Maneras de contar

Contar la cantidad de elementos que tiene un conjunto no siempre es posible ni, mucho menos, fácil. Es fácil cuando el conjunto no contiene muchos elementos y se pueden enumerar, sin embargo a partir de que un conjunto empieza a tener una cierta cantidad de elementos la cosa cambia mucho. Hay ocasiones en que unas sencillas técnicas de combinatoria nos permiten contar la cantidad de elementos que hay en conjuntos grandes de un modo sorprendentemente cómodo. La idea detrás de estas técnicas es lo que se conoce como *el principio básico de contar*.

Comenzamos con un ejemplo: queremos conocer la cantidad de números de dos cifras de modo que sus decenas son 5 o 7 y sus unidades son 3, 4 o 6. Este conjunto es muy fácil de contar por enumeración ya que coincide con el conjunto

$$\{53, 54, 56, 73, 74, 76\}$$

y, por tanto, contiene 6 elementos.

Sin embargo podemos preguntarnos: ¿De cuántas maneras distintas podemos elegir el primer dígito de los números de este conjunto? ¿De cuántas maneras distintas podemos elegir el segundo dígito de los mismos? Siendo las repuestas, respectivamente, 2 y 3. Ahora bien, si nos damos cuenta de que el conjunto de números indicado coincide con asociar a cada una de las decenas dadas cada una de las unidades dadas, nos daremos cuenta de que por cada decena tenemos tres unidades distintas y, por tanto, puesto que tenemos dos decenas distintas, que la cantidad de números posibles son $2 \times 3 = 6$. En esto consiste fundamentalmente el principio básico de contar.

Principio básico de contar:
Si una cosa se puede hacer de N_1 maneras y, después, una segunda cosa se puede hacer de N_2 maneras distintas, las dos cosas se pueden hacer de modo sucesivo de $N_1 \cdot N_2$ maneras distintas. Esto se puede extender a cualquier número finito de acciones sucesivas, entonces el número total de maneras de realizar una serie de actos de modo sucesivo es el producto $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot \ldots$.

Ejemplo 1. ¿Cuántos números hay de tres cifras? (Entendemos que $0 = 000$ y así con todos los números menores de 100).

La respuesta es obvia, 1000, pero ¿qué nos dice el principio básico de contar? Pues que se hace una primera acción que es elegir la unidad de millar y se puede hacer de 10 maneras distintas, otra segunda (elegir unidades de decena) que se puede hacer de 10 maneras distintas y otra tercera (elegir unidades) que igualmente se puede realizar de 10 maneras distintas y que, por tanto, hay $10 \times 10 \times 10$ maneras distintas de hacer esas tres acciones de modo sucesivo (ordenado).

Permutaciones

Imagina ahora que tenemos n cosas en una fila. Nos preguntamos de cuántas maneras distintas podemos ordenarlas (permutarlas). Este número se llama *permutaciones de n elementos tomados de n en n* y se suele denotar de distintas maneras en la literatura:

$$nPn, P(n,n), P_n^n.$$

Para encontrar este número podemos pensar en las distintas maneras de sentar n personas en n sillas dadas. De este modo, podemos realizar una primera acción que consiste en colocar una persona en una de las sillas, para lo que tenemos n opciones posibles. Una vez que hemos realizado esta primera acción, tenemos $n-1$ opciones distintas de seleccionar una silla para la segunda persona, $n-2$ para la tercera, y así sucesivamente hasta que para la última persona tenemos una única silla libre. Aplicando el principio básico de contar deducimos que en total se puede hacer esta acción sucesiva de

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$$

maneras distintas.

El número de permutaciones de n elementos tomados de n en n es, por tanto,

$$P(n,n) = n!$$

Si suponemos ahora que hay n personas pero sólo $r < n$ sillas entonces hablamos de permutaciones de n elementos tomados de r en r.

El número de permutaciones de n elementos tomados de r en r es

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Ejercicio 1. En una clase de 30 alumnos de cuántas maneras distintas se puede elegir un delegado, un subdelegado y un secretario.

Combinaciones

Cuando pensamos en permutaciones pensamos en maneras ordenadas de elegir elementos de un grupo dado. ¿Qué ocurre cuando el orden no nos interesa? Es decir, si en el ejercicio anterior en lugar de elegir un delegado, un subdelegado y un secretario, lo que nos interesa es elegir un comité de tres representantes de la clase, ¿qué cantidad de opciones posibles tendremos? Al número de comités de r personas que se pueden formar a partir de un grupo de n personas se le llama *combinaciones (o selecciones) de n cosas elegidas de r en r* y se denota como

$$nCr,\ C(n,r),\ \binom{n}{r}.$$

Para determinar $C(n,r)$ podemos partir de que sabemos que la forma de elegir r elementos de modo ordenado coincide con $P(n,r)$. De hecho, para calcular $P(n,r)$ lo que podemos hacer es seleccionar primero r elementos sin orden, lo que se puede hacer de $C(n,r)$ maneras distintas, y después ordenarlos, lo que se puede hacer de $P(r,r)$ maneras distintas. Por tanto, aplicando el principio básico de contar, acabamos de deducir que

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r).$$

Es decir,

el número de formas distintas en que se pueden elegir r elementos de una colección de n sin orden es

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}.$$

Ejercicio 2. A partir de la fórmula anterior es inmediato probar que las combinaciones de n elementos tomados de r en r coincide con las combinaciones de n elementos tomados de $n-r$ en $n-r$. Sin embargo, ¿puedes encontrar un razonamiento que justifique lo anterior sin usar dicha fórmula?

Ejercicio 3. Encuentra el coeficiente de x^8 en la expansión del binomio $(1+x)^{15}$.

Ejercicio 4. (Coeficiente multinomial) ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 15 bolas en 6 cajas numeradas con la siguiente distribución: 3 bolas en la caja 1, una en la caja 2, 4 en la caja 3, 2 en la caja 4, 3 en la caja 5 y 2 en la caja 2?

Nota. Los números $\binom{n}{r}$ se conocen como coeficientes binomiales ya que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Sin embargo, si queremos desarrollar una expresión del estilo

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n$$

entonces aparecen los multinomiales ya que

$$(x_1 + \cdots + x_r)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_r=n} \binom{n}{n_1 \cdots n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r},$$

donde

$$\binom{n}{n_1 \cdots n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}.$$

Permutaciones con repetición

Otro caso es el de las permutaciones con repetición. Se da cuando tenemos que seleccionar elementos de una colección dada de modo ordenado y además podemos seleccionar el mismo elemento tantas veces como permita el tamaño de las selecciones. Es, por ejemplo, lo que ocurre cuando lanzamos un dado 5 veces y anotamos de modo ordenado según el lanzamiento cada uno de los resultados. En este caso obtendríamos una colección total de 6^5 anotaciones posibles.

El número de permutaciones con repetición de n elementos elegidos de m en m (m no guarda relación con n) viene dado por

$$n^m.$$

2. Problemas propuestos.

Ejercicio 5. ¿Cuántos números enteros no mayores de 2016 son múltiplos de 3 o de 4 (no de ambos) y no de 5?

Ejercicio 6. Sea n un número impar mayor que 1. Probar que la colección de números

$$\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{\frac{n-1}{2}}$$

contiene una cantidad impar de números impares.

Ejercicio 7. Dado un número racional lo escribimos de modo simplificado y calculamos el producto de su numerador y denominador. ¿Cuántos número racionales entre 0 y 1 verifican que dicho producto es 20!?

Ejercicio 8. ¿Cuántos pares de números consecutivos de la familia

$$\{1000,\ 1001,\ 1002,\ \ldots,\ 2000\}$$

se pueden sumar sin hacer llevadas?

Ejercicio 9. Probar que entre cualquier colección de 16 números positivos distintos no mayores de 100 hay cuatro diferentes a, b, c y d de modo que $a + b = c + d$.

Ejercicio 10. Determina el número de colecciones de cinco número de entre los 18 primeros números naturales de modo que cualesquiera dos de ellos difieren al menos en 2 unidades.

Ejercicio 11. En una habitación con N personas, $N > 3$, al menos una persona no ha estrechado manos con todas las demás. ¿Cuál es el mayor número de gente posible en la habitación que han estrechado manos con todos los presentes?

Ejercicio 12. Encuentra la cantidad de cuádruplas (x_1, x_2, x_3, x_4) de números enteros positivos de modo que

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 51.$$

Relaciona este número con la cantidad de cuádruplas (y_1, y_2, y_3, y_4) de números impares positivos de modo que sus sumas coinciden siempre con 98.

Ejercicio 13. Sea S un conjunto con 6 elementos. ¿De cuántas maneras distintas se pueden elegir dos subconjuntos de S, no necesariamente distintos, de tal modo que la unión de los dos subconjuntos sea S? El orden de los subconjuntos elegidos no importa, es decir, el par de subconjuntos $\{a, c\}, \{b, c, d, e, f\}$ representa la misma selección que el par $\{b, c, d, e, f\}, \{a, c\}$.

Problemas extraídos de *102 Combinatorial Problems (From the Training of the USA IMO Team*, Titu Andreescu y Zuming Feng, Birkhauser, 2002.